OSCILACIONES DE TENSIONES Y RIGIDEZ INICIAL EN ELEMENTOS DE INTERFAZ PARA SIMULACIÓN NUMÉRICA DE FISURAS COHESIVAS

Jaime Planas[1], **David Cendón**[1] **y José M. Sancho**[2]

[1] **Departamento de Ciencia de Materiales,Universidad Politécnica de Madrid.**
ETS de Ingenieros de Caminos, Profesor Aranguren s/n, 28040 Madrid.

[2] **Departamento de Estructuras de Edificación, Universidad Politécnica de Madrid.**
ETS deArquitectura, Avda. Juan de Herrera, 4, 28040 Madrid.

Resumen. Este artículo analiza los errores introducidos en un análisis numérico de una fisura cohesiva cuando se utilizan elementos de interfaz para simular la curva tensión-abertura de grieta. En primer lugar se analiza el comportamiento asintótico (rigidez inicial infinita del interfaz). Este análisis demuestra que aparece una distribución de tensiones oscilante enfrente de una grieta elástica preexistente siempre que la interpolación de tensiones es continua. A continuación se aborda el problema de los errores introducidos por el uso de elementos de interfaz de rigidez inicial ficticia finita, y se obtienen expresiones adimensionales generales y una propuesta provisional para evaluar los errores.

Abstract. This paper analyzes the errors introduced in the numerical analysis of a cohesive crack when interface elements are used to simulate the stress-crack opening curve. The asymptotic analysis of infinite initial interface stiffnes is first carried out. It is shown that an oscilating stress field appears ahead of a crack whenever the stresses are interpolated continuously. The problem of the errors introduced by using a fictitious finite initial stiffness is next addressed, and general dimensionless expressions are given together with a tentative procedure to evaluate the errors.

1 INTRODUCCIÓN

El modelo de fisura cohesiva, introducido por Barenblatt y Dugdale a finales de los años 1950 [1, 2], ha sido extensamente utilizado para describir la fractura del hormigón desde su extensión a modelo constitutivo por Hillerborg [3, 4] y en la actualidad se aplica al estudio de la fractura de casi todos los materiales, incluidos los metales

Una de las formas tradicionales de efectuar cálculos para reproducir numéricamente la evolución de una zona cohesiva es utilizar el método de elementos finitos con elementos de interfaz que incorporan el comportamiento cohesivo, es decir, la relación entre la apertura de la fisura y la tensión transmitida entre sus caras (la *función de ablandamiento*)[5-9].

Los elementos de interfaz presentan dos problemas conocidos desde hace al menos tres lustros. El primero es que originan oscilaciones espurias del campo de tensiones a lo largo de la zona cohesiva [5, 7, 10], como muestra la solución de Rots [5] mostrada en la figura 1, similar a la obtenida por García-Álvarez, Carol y Gettu [7].

El segundo es que para un funcionamiento como elemento finito estándar, un elemento de interfaz debe tener una

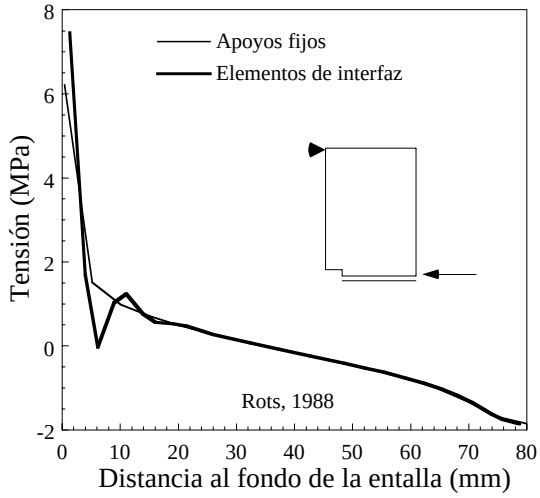


Figura 1. Soluciones oscilantes para elementos de interfaz lineales y continuos, comparados con la solución ideal de apoyos rígidos [5]. Las soluciones corresponden a una viga de 100 mm de canto y 400 de luz con una entalla de 20 mm en el centro, con un módulo de elasticidad de 20 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.2; la rigidez de los elementos de interfaz es de 10^5 MPa/mm^3.

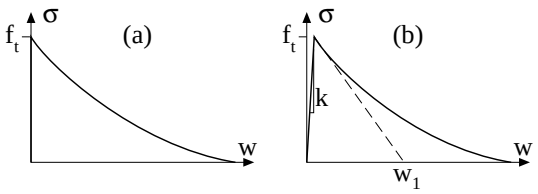


Figura 2. La curva de ablandamiento que en teoría presenta una rigidez inicial infinita (a) se sustituye en los elementos de interfaz por una curva con rigidez inicial ficticia k muy elevada (b).

rigidez inicial finita mientras que una fisura cohesiva tiene un comportamiento inicialmente rígido, por lo que es necesario introducir una rigidez inicial ficticia como indica la figura 2. La rigidez inicial ficticia no forma parte, obviamente, del modelo constitutivo, sino que es un factor de penalización numérica para imponer la condición de abertura nula en la fase inicial, y, aunque puede, en principio, elegirse arbitrariamente grande, esto tiene inconvenientes puestos ya de manifiesto por diversos autores [5, 9] en el marco de la modelización de la fractura y con carácter general para el análisis estructural por Cook y Hughes, entre otros [11, 12].

Sin embargo, valores muy altos de la rigidez ficticia provocan un mal condicionamiento numérico (que proviene de la introducción de elementos muy grandes en la matriz de rigidez del sistema) y deterioran la convergencia del proceso iterativo (debido a la introducción de términos de muy diversa magnitud en el vector de fuerzas residuales). Por lo tanto, debe usarse un valor de compromiso que sea suficientemente bajo para no producir problemas numéricos y suficientemente alto para no introducir demasiado error respecto de la solución teórica con rigidez infinita.

Como se ha dicho, estos problemas son bien conocidos, pero ni se sabe muy bien por qué se obtienen soluciones oscilantes, ni se dispone de una técnica general para acotar los valores de la rigidez inicial ficticia que deben utilizarse para obtener un nivel de precisión dado. En este artículo analizamos primero las oscilaciones espurias para rigidez muy grande de los elementos de interfaz, y a continuación establecemos las bases sistematizar el cálculo del error introducido por la rigidez inicial ficticia.

2 ANÁLISIS DE LAS OSCILACIONES

Para estudiar el origen de las oscilaciones de tensiones consideramos una probeta con una fisura potencial situada en su plano de simetría y solicitada en modo I (figura 3a), y colocamos a lo largo de la misma una capa de elementos de interfaz. Suponemos, además, que la rigidez inicial de los elementos de intefaz es suficientemente elevada para que el estado de las regiones continuas no

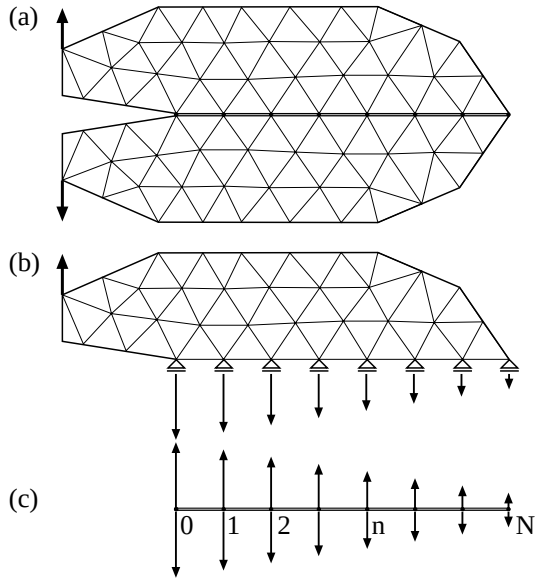


Figura 3. (a) Capa de elementos de interfaz en modo I. (b) Solución aproximada para las fuerzas nodales externas (rigidez muy grande de los elementos de interfaz). (c) Solicitación de la capa elementos de interfaz.

difiera sensiblemente del que tendrían si la rigidez fuera realmente infinita. De acuerdo con esto, podemos separar la región continua superior, por ejemplo, ligarla con apoyos fijos al plano de simetría y determinar las reacciones (figura 3b). El estado de la capa de elementos de interfaz vendrá entonces determinada por la acción de fuerzas nodales iguales y contrarias a las reacciones antes determinadas (figura 3c). Se trata por tanto de determinar la distribución de tensiones en la capa de elementos de intercara sujetos a fuerzas nodales conocidas, tal como muestra la figura 3c.

Para concretar, consideramos elementos de interfaz de cuatro nudos con interpolación lineal de desplazamientos y tensiones (elementos continuos) y comportamiento elástico con $\sigma = kw$, donde w es la abertura del elemento de interfaz (separación entre pares de nudos inicialmente coincidentes) y $k \to \infty$ la rigidez. Suponiendo una capa de N elementos, con los pares de nudos numerados del 0 al N, como los esquematizados en la figura 3c, las ecuaciones de equilibrio se obtienen de forma estándar de la aplicación del principio de los trabajos virtuales en la forma

$$\left[\int N_n(x)N_m(x)dx\right]\sigma_n = \hat{f}_m \quad (m,n \in [0,N]) \quad (1)$$

donde $N_m(x)$ $(m = 0, \cdots, N)$ son las funciones de forma para interpolación de tensiones y desplazamientos, σ_n la tensión interna $(= kw_n)$ en el nodo n y $\hat{f}_m$ la fuerza nodal externa. Las ecuaciones correspondientes a nivel de elemento para elementos lineales son,

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

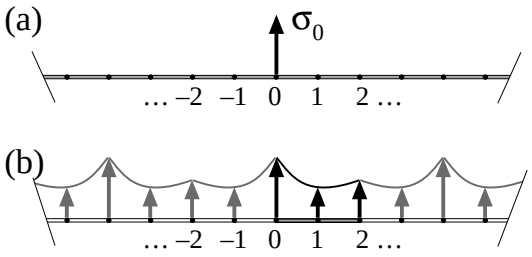


Figura 4. (a) Capa indefinida de elementos de interfaz sometidos a carga puntual en el centro. (b) Capa finita que se extiende periódicamente.

fonde f_i son las fuerzas nodales, h la longitud del elemento y σ_i las tensiones en los nodos (calculadas a partir de las aberturas de grieta como $\sigma_i = kw_i$).

Para elementos de igual tamaño h, el sistema de ecuaciones se puede escribir en la forma

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 4\sigma_0 & + & 2\sigma_1 & = & 6\hat{\sigma}_0 \\ \sigma_0 & + & 4\sigma_1 & + & \sigma_2 & = & 6\hat{\sigma}_1 \\ & \cdots & & & & & \\ \sigma_{n-1} & + & 4\sigma_n & + & \sigma_{n+1} & = & 6\hat{\sigma}_n \\ & \cdots & & & & & \\ \sigma_{N-2} & + & 4\sigma_{N-1} & + & \sigma_N & = & 6\hat{\sigma}_{N-1} \\ 2\sigma_{N-1} & + & 4\sigma_N & & & = & 6\hat{\sigma}_N \end{array} \qquad (3)$$

donde $\hat{\sigma}_n$ es la tensión nodal externa, que se calcula dividiendo la fuerza nodal externa representada en la figura 3c por el tamaño del elemento h, salvo en los nudos extremos en que se divide por $h/2$:

$$\hat{\sigma}_n = \begin{cases} \hat{f}_n/h & \text{para } n = 1, \cdots, N-1 \\ 2\hat{f}_n/h & \text{para} n = 0 \text{ o } N \end{cases} \qquad (4)$$

El sistema de ecuaciones (1) es tridiagonal y puede resolverse eficientemente utilizando, por ejemplo, la subrutina `tridag` de Press *et al* [13]. Sin embargo, es también posible expresar la solución en forma de serie infinita a partir de la solución básica que corresponde a una capa infinita de elementos con una única fuerza nodal como indica la figura 4a. La solución básica es

$$\sigma_n = \sqrt{3}\,\hat{\sigma}_0 (-1)^{|n|} a^{|n|}\,, \qquad a = 2 - \sqrt{3} > 0\,, \qquad (n = -\infty, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, +\infty) \qquad (5)$$

y es claramente oscilante. Nótese también que la oscilación se amortigua con el número de orden del nudo, y que es inferior al 0.25% para $|n| > 4$. Por superposición de soluciones del tipo anterior se obtiene la solución general

$$\sigma_n = \sqrt{3}\left[\hat{\sigma}_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\hat{\sigma}_{n+k} + \hat{\sigma}_{n-k}\right)(-1)^k a^k\right] \qquad (6)$$

donde, si el dominio es finito, se efectua una prolongación periódica continua de la distribución de tensiones

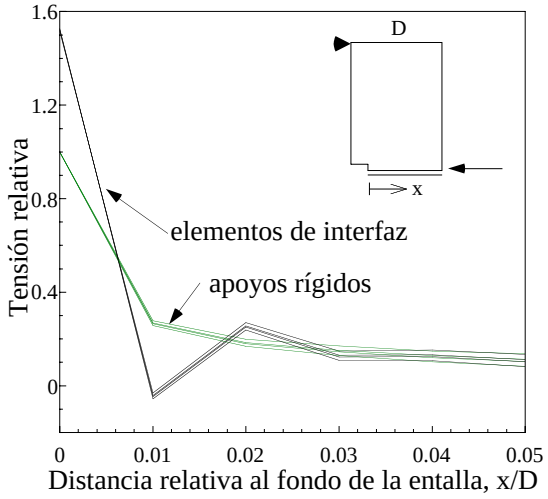


Figura 5. Comparación de las distribuciones de tensiones obtenida con apoyos rígidos y con elementos de interfaz lineales de rigidez infinita. Los resultados corresponden a vigas entalladas con profundidades de entalla del 10, 33, 50 y 70% del canto.

nodales extendida a toda la recta real, tal como esquematiza la figura 4b.

Se ha programado el cálculo de la solución por los dos métodos (solución directa del sistema y solución semianalítica) y se ha comprobado que ambos conducen a los mismos resultados para sistemas finitos de hasta 100 elementos. La solución semianalítica permite, además, abordar sistemas de extensión infinita o semi-infinita.

El método se ha aplicado a una viga sometida a flexión en tres puntos con una longitud de entalla variable, con elementos de interfaz de una centésima del canto en su sección central. Los resultados de los cálculos indican que cuando la distribución de tensiones es suave (caso sin entalla), los elementos de interfaz reproducen bien la distribución de tensiones, como era de esperar. En cambio, cuando existe una entalla que concentra las tensiones, las oscilaciones son muy fuertes, como puede verse en la figura (5) que muestra los valores de la tensión relativa a la tensión nodal externa máxima ($\hat{\sigma}_0$) para valores de la relación entalla/canto de 0.1, 0.33, 0.5 y 0.7. Como puede apreciarse, la oscilación es sensiblemente independiente del tamaño de la entalla y se amortigua rapidamente, pero es muy alta a lo largo de los dos primeros elementos.

Los resultados ponen de manifiesto que los elementos de interfaz continuos dan lugar a distribuciones de tensiones oscilantes siempre que existen concentraciones de tensiones. En nuestra opinión, este comportamiento es intrínseco y viene dictado por el comportamiento oscilante del sistema de ecuaciones (3), y no puede mejorarse modificando las reglas de integración, porque el problema estriba en que la matriz de la ecuación (2), que relaciona

las fuerzas nodales con las tensiones nodales a nivel de elemento, tiene términos no diagonales positivos. La solución obvia es modificar el elemento de manera que la matriz sea diagonal, i.e:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

donde las tensiones se relacionan igual que antes con las aberturas de los elementos. Esto es equivalente a usar elementos de interfaz de tipo muelle localizados en los nudos tal como hacen Rots [5] y Cendón y otros [9].

3 INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ INICIAL

Hasta hoy, la influencia de la rigidez inicial ficticia ha sido estudiada para cada caso particular, pero no hay una metodología general para abordar el problema. Por ejemplo, Rots sugiere valores de 10^5 N/mm^3 para conseguir resultados muy próximos a los de rigidez infinita en el caso por él estudiado de las vigas entalladas definidas en el pié de la figura 1. Es obvio que sus resultados son válidos exclusivamente para ese casoya que él mismo indica que otros autores han utilizado valores entre 47 y 2000 N/mm^3, para diferentes estructuras, lo que demuestra que los valores particulares son de poca ayuda para otros casos.

En el presente trabajo intentamos una aproximación general basada en adimensionalizar el problema y establecer desigualdades en los parámetros adimensionales.

3.1 Relaciones adimensionales

La rigidez ficticia k (figura 2b) influye (es decir, modifica la solución teórica) en dos aspectos: influye primero en la respuesta elástica del sistema aumentando la flexibilidad del mismo, y segundo en la curva de ablandamiento del material, ya que introduce una abertura de grieta para la tensión máxima que en realidad debiera ser nula.

Desde el punto de vista del comportamiento puramente elástico, la rigidez inicial puede compararse con la rigidez de un elemento de tamaño similar al de nuestra estructura. Por ejemplo, en el caso de una viga de canto D, debemos tener

$$k \gg \frac{E}{D}, \tag{8}$$

lo que nos permite definir un valor adimensional $k^* = kD/E$ y escribir la condición

$$k^* = \frac{kD}{E} \gg 1 \tag{9}$$

Por otra parte, para hacer pequeña la perturbación introducida en la curva de ablandamiento, podemos requerir que la abertura introducida en la grieta por la rigidez ficticia en el pico de tensión, f_t/k, sea muy pequeña comparada con una abertura carcterística, como la w_1 obtenida por intersección de la tangente inicial a la curva de ablandamiento con el eje horizontal. Esto lleva a la condición

$$k \gg \frac{f_t}{w_1} \Rightarrow k^* \gg \frac{f_t D}{w_1 E} = \frac{D}{2\ell_1} \tag{10}$$

donde $\ell_1 = Ew_1/(2f_t)$ es una longitud que caracteríza la fragilidad del material [14].

Vemos, por tanto, que k^* debe cumplir dos condiciones, una para la fase puramente elástica del problema y otra para la parte de la fractura. En esta primera investigación, analizamos el comportamiento elástico.

3.2 Comportamiento elástico

Para estudiar la influencia de la rigidez ficticia inicial, se han realizado cálculos elásticos sobre una viga entallada con longitud de entalla variable sometida a flexión en tres puntos con una relación luz/canto de 4. Para los cálculos se ha tomado $E = 1$, $\nu = 0$ y una malla de elementos finitos con 100 elementos idénticos sobre el canto. Se ha utilizado el programa de elementos finitos ABAQUS. Para los elementos de interfaz se utilizaron elementos de tipo SPRING1 con una rigidez inicial correspondiente a valores de k^* variando de orden de magnitud en orden de magnitud entre 50 y 50×10^5.

El resultado fundamental es el error que la rigidez finita de los elementos de interfaz introducen en la flexibilidad. Es bien sabido que la presencia de una entalla o fisura incrementa la flexibilidad de la probeta por encima de su valor elástico, de manera que

$$C = C_0 + \Delta C(\alpha) = \frac{1}{BE}\left[C_0^* + \Delta C^*(\alpha)\right] \tag{11}$$

donde C_0 es la flexibilidad en ausencia de grieta, $\alpha = a/D$ la profundidad relativa de la grieta, $\Delta C(\alpha)$ la flexibilidad adicional introducida por la grieta y la segunda ecuación es la versión adimensional de la primera con $C^* = CBE =$ flexibilidad adimensional y B = espesor de la probeta. Cuando se introducen elementos de interfaz, la flexibilidad será aparentemente mayor que la anterior, y es facil comprobar que en el caso de que el material de la viga sea rígido (es decir $E \to \infty$ y, por tanto $C = 0$, la flexibilidad resultante, debida únicamente a los elementos de interfaz, es

$$C_k = \frac{1}{kBD}\frac{12}{(1-\alpha)^3} \tag{12}$$

En general, cuando el módulo de elasticidad sea finito, tendremos una ecuación del tipo

$$EB(C_k - C_\infty) = \frac{1}{k*}\phi(\alpha, k^*) \tag{13}$$

donde C_∞ es la flexibilidad para rigidez infinita de los elementos de interfaz y la función adimensional $\phi(\alpha, k^*)$ caracteriza completamente la influencia de los elementos de interfaz en la respuesta.

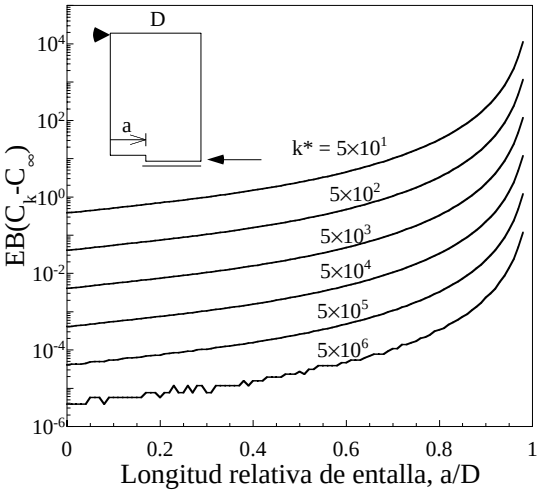


Figura 6. Diferencia entre las flexibilidades correspondientes a elementos de interfaz de rigidez finita y apoyos rígidos. Nótese que que los resultados son más oscilantes para la más alta de las rigideces ($k* = 5 \times 10^6$).

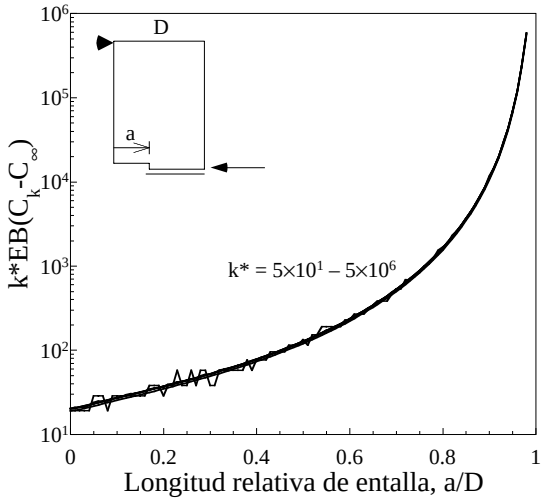


Figura 7. Las curvas de error se superponen cuando se multiplican las diferencias por k^*.

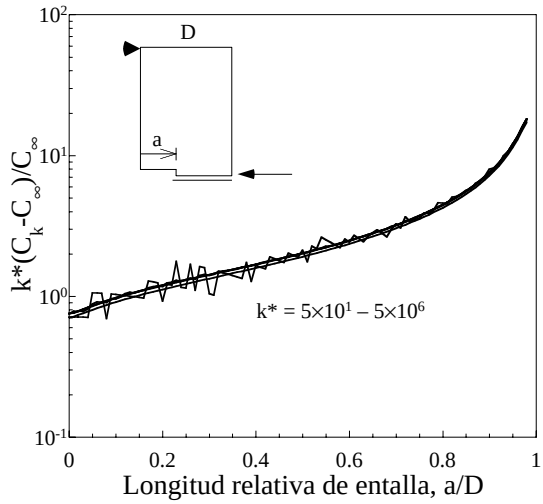


Figura 8. Curvas de error relativo de la flexibilidad.

La figura 6 representa, en diagrama logarítmico, la diferencia de flexibilidades multiplicada por EB en función de la profundidad de la entalla y de la rigidez adimensional k^* de los elementos de interfaz. Las curvas son prácticamente paralelas y equidistantes, lo que significa que son aproximadamente proporcionales a la inversa de la flexibilidad, lo que se pone de manifiesto en la figura 7, en la que se representa el producto de k^* por la diferencia de flexibilidades, con lo que las curvas anteriores se funden en una sola curva, lo que significa que en el intervalo de valores estudiado, la función $\phi(\alpha, k^*)$ es sensiblemente independiente de la rigidez adimensional.

Los resultados indican que la influencia de los elementos de interfaz es enormemente dependiente de la geometría, representada en este caso por la longitud relativa de entalla, ya que para entallas profundas el error es varios órdenes de magnitud superior al que se tiene para entallas superficiales. La influencia de la profundidad de entalla es menos acusada para el error relativo como muestra la figura 8 en la que se aprecia que el error relativo varía un orden de magnitud aproximadamente al pasar de entallas superficiales a entallas profundas.

Sin embargo, la mejor representación parece ser, por el momento, la derivada de la fórmula (12) que, al estar basada en un análisis de sólido rígido con interfaz flexible, puede aplicarse para estimar el efecto de la rigidez inicial *a priori* sin cálculos complicados. La figura 9 muestra que dicha aproximación encaja bien dentro de un orden de magnitud para entallas no muy profundas.

4 CONCLUSIONES

1. Los elementos de interfaz continuos llevan a distribuciones de tensiones oscilantes siempre que hay concentraciones de tensiones. Las oscilaciones se resuelven usando elementos con tensiones concentradas en los nodos (colocación en puntos nodales).

2. La rigidez inicial afecta los cálculos elásticos a través del parámetro adimensional $k^* = kD/E$. Pra los casos estudiados, el error introducido es inversamente proporcional a k^*.

3. Se han calculado los errores introducidos por la rigidez inicial ficticia para una viga entallada depende mucho de la profundidad de la entalla, siendo mucho mayor para entallas profundas.

4. En primera aproximación los errores pueden estimarse mediante el modelo de interfaz flexible en

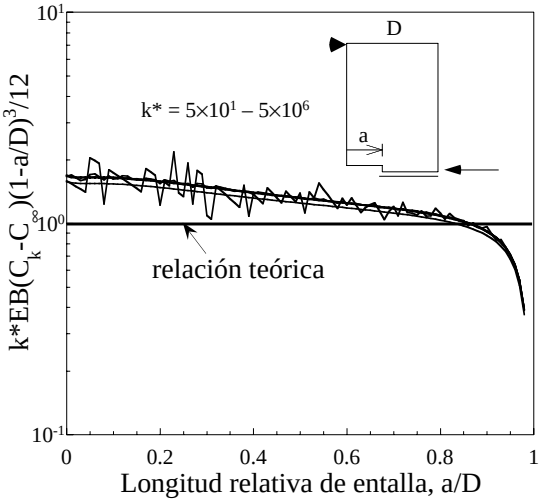


Figura 9. El orden de magnitud del error está aproximadamente representado por la aproximación de material rígido definida por la ecuación (12).

medio rígido, aunque sólo proporciona el orden de magnitud del error. Son precisos estudios complementarios para verificar la aplicabilidad de este método de estimación a otras geometrías.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer la ayuda económica proporcionada por el Ministerio de Ciencia y Tecnología a través del proyecto MAT2001-3863-C03-01.

5 REFERENCIAS

[1] Barenblatt, G.I., "The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture", Adv. Appl. Mech., 7, 55–129 (1962).

[2] Dugdale, D.S., "Yielding of steel sheets containing slits", J. Mech. Phys. Solids, 8, 100–108 (1960).

[3] Hillerborg, A., Modéer, M. and Petersson, P.E., "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", Cement Concrete Res., 6, 773–782 (1976).

[4] Hillerborg, A., "The theoretical basis of a method to determine the fracture energy G_F of concrete", Mater. Struct., 18, 291–296 (1985).

[5] Rots, J.G., *Computational Modeling of Concrete Fracture.* Doctoral Thesis. Delft University of Technology, Delft, The Netherlands (1988).

[6] Needleman, A., "A continuum model for void nucleation by inclusion debonding", J. Applied Mech., 54, 525–531 (1987).

[7] García-Álvarez, V.O., Carol, I. and Gettu, R., "Numerical Simulation of Fracture in Concrete Using Joint Elements", Anales de Mecánica de la Fractura, 11, 75–80 (1994).

[8] Červenka, J. and Saouma, V.E., "Discrete crack modeling in concrete structures", en Fracture Mechanics of Concrete Structures (Ed. Wittmann, F.H.) pp. 1285–1300, Aedificatio Publishers, Freiburg, Germany (1995).

[9] Cendón, D.A., Gálvez, J.C., Elices, M. and Planas, J., "Modelling the fracture of concrete under mixed loading", Int. J. Fracture, 103, 293–310 (2000).

[10] Schellekens, J.C.J. and de Borst, R., "On the numerical integration of interface elements", Int. J. Num. Methods Engin., 36, 46–66 (1993).

[11] Cook, R.D., Malkus, D.S. and Plesha, M.E., *Concepts and applications of Finite Element Analysis*, 3rd Edition, John Wiley& Sons, New York (1989).

[12] Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1987).

[13] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P.,*Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, New York (1992).

[14] Bažant, Z.P., and Planas, J., *Fracture and Size Effect of Concrete and Other Quasibrittle Materials*, CRC Press, Boca Raton, FL (1998).